2. Probabilidad

Nos interesa describir fenómenos aleatorios y analizando el comportamiento agregado de todas las observaciones individuales - al parecer imposibles de describir - nos damos cuenta de que es estable y regular.

$\Rightarrow$ la tarea se reduce a describir un marco matemático formal que nos ayude a caracterizar este comportamiento agregado.

$\rightarrow$ El elemento central de este marco matemático es la teoría de probabilidad

2.1. Elementos básicos de la teoría de probabilidad

Para entender la teoría de probabilidad es necesario conocer varios conceptos básicos:

experimentos, ensayos, resultados, espacio muestral y eventos.

a) Experimento. Cualquier proceso que genere información acerca del fenómeno aleatorio de interés.

b) Resultado. El resultado del experimento.

c) Ensayo. Una sola realización del experimento que da origen a un resultado.

d) Espacio muestral. El conjunto de todos los posibles resultados de un experimento

e) Evento. Un conjunto de posibles resultados con algún atributo en común.

Ejemplo:

Lanzamos 3 monedas y registrar los posibles resultados

Experimento: Lanzar 3 monedas y registrar los posibles resultados: águila - A y sol S.

Ensayo: Cada ensayo involucra el lanzamiento de 3 monedas o la misma moneda 3 veces

Resultados: Los posibles resultados del experimento son

AAA, AAS, ASA, SAA,
SSS, SSA, SAS, ASS.

Espacio muestral:

$$\Omega = \{AAA, AAS, ASA, SAA, SSS, SSA, SAS, ASS\}$$

Eventos

$A = \{\text{Caen al menos 2 águilas}\}$

$= \{AAA, AAS, ASA, SAA\}$

$B = \{\text{Cae un sol}\}$

$= \{AAS, ASA, SAA\}$

Un evento elemental es aquel que constituye sólo un resultado del experimento. Cualquier otro evento que esté compuesto de 2 o más resultados es un evento compuesto.

$\Rightarrow$ los eventos A y B son eventos compuestos

$\theta = \{AAA\}$ - evento elemental.

Los eventos elementales son mutuamente excluyentes

Operaciones de conjuntos

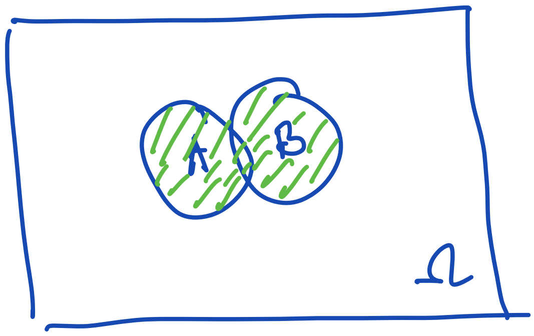
Ω - conjunto de todos los posibles resultados

$\Rightarrow$ cualquier evento A, $A \subset \Omega$

$\Leftrightarrow$ Si $x \in A \Rightarrow x \in \Omega$

$\emptyset$ - conjunto vacío

Unión $A \cup B \Rightarrow$ Si $x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A$ ó $x \in B$

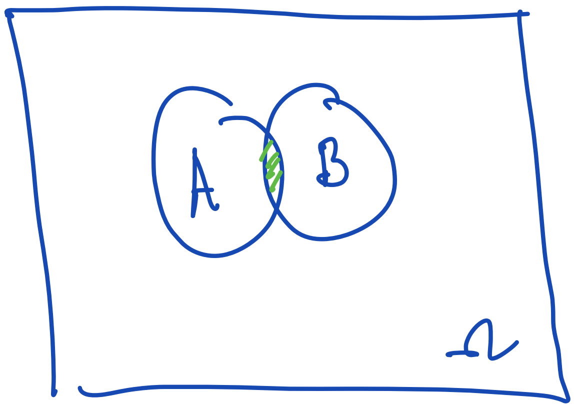


En general $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k = \bigcup_{i=1}^{k} A_i$

$$x \in \bigcup_{i=1}^{k} A_i \iff x \in A_j \text{ para algún } j$$

x está en al menos uno de los conjuntos

Intersección: $A \cap B \Rightarrow x \in A \cap B \iff x \in A$ y $x \in B$



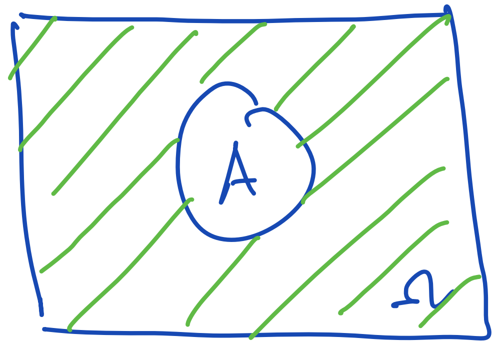
En general $A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \dots \cap A_k = \bigcap_{i=1}^{k} A_i$

$x \in \bigcap_{i=1}^{k} A_i \iff$ x está en todos los k conjuntos

Para cualquier evento A, $A \cup \emptyset = A$
$A \cap \emptyset = \emptyset$

y $A \cup \Omega = \Omega$
$A \cap \Omega = A$

Complemento. $A^c \Rightarrow x \in A^c \Leftrightarrow x \notin A$ y $x \in \Omega$



Como consecuencia

$$\Omega^c = \emptyset$$
$$\emptyset^c = \Omega$$

$$(A^c)^c = A$$

Leyes de De Morgan
$$\begin{cases} (A \cup B)^c = A^c \cap B^c \\ (A \cap B)^c = A^c \cup B^c \end{cases}$$

Finalmente tenemos las siguientes propiedades

Conmutativa

$$A \cup B = B \cup A$$
$$A \cap B = B \cap A$$

Asociativa

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

Distributiva

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$$

Axiomas de probabilidad

Sea $P(\cdot)$ una función definida en el espacio muestral Ω de algún experimento, que asocia uno y sólo un número real a cada elemento de Ω, que cumple con

1- $P(A) \geq 0, \quad \forall A \subset \Omega$
2- $P(\Omega) = 1$
3- Para cualquier dos conjuntos A y B mutuamente excluyentes $(A \cap B = \emptyset)$, se tiene que

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

$\Rightarrow$ P es una función de probabilidad, i.e.

$$P : \Omega \longrightarrow [0, 1]$$

Estos tres "inocentes" axiomas y las operaciones de conjuntos que conocemos son suficientes para desarrollar la teoría matemática de la probabilidad.

Corolario 1. $P(A^c) = 1 - P(A)$

Dem

$$\Omega = A \cup A^c \Rightarrow 1 = P(\Omega) = P(A) + P(A^c)$$

$$\Rightarrow P(A^c) = 1 - P(A) \quad \dashv$$

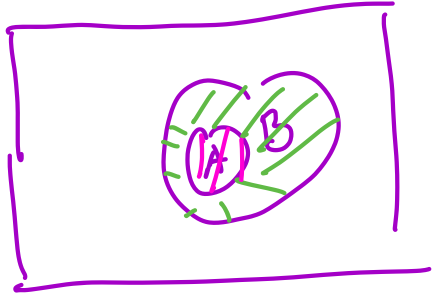
Corolario 2. $P(\emptyset) = 0$

Dem

$$\Omega = \Omega \cup \emptyset \Rightarrow 1 = P(\Omega) = P(\Omega) + P(\emptyset)$$

$$\Rightarrow P(\emptyset) = 0 \quad \dashv$$

Corolario 3. Si $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$



$$B = A \cup (B \cap A^c) \Rightarrow P(B) = P(A) + P(B \cap A^c)$$

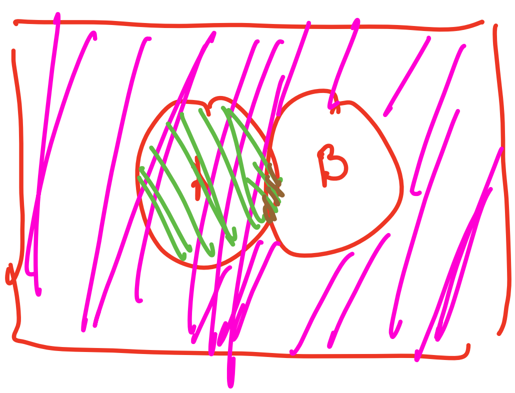
Como $P(B \cap A^c) \geq 0$

$$\Rightarrow P(A) \leq P(A) + P(B \cap A^c) = P(B) \quad \text{⅃}$$

Corolario 4. Para cualquier $A \subset \Omega \Rightarrow 0 \leq P(A) \leq 1$

Corolario 5. Para cualquier A y B contenidos en Ω

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$



$$(A \cup B) = (A \cap B) \cup (A \cap B^c) \cup (B \cap A^c)$$

$$P(A\cup B) = P(A\cap B) + P(A\cap B^c) + P(B\cap A^c)$$

$$A = (A\cap B)\cup(A\cap B^c)$$
$$B = (A\cap B)\cup(B\cap A^c)$$

$$P(A) = P(A\cap B) + P(A\cap B^c)$$
$$P(B) = P(A\cap B) + P(B\cap A^c)$$

$$P(A\cap B^c) = P(A) - P(A\cap B)$$
$$P(B\cap A^c) = P(B) - P(A\cap B)$$

$$P(A\cup B) = \cancel{P(A\cap B)} + P(A) + P(B) - \cancel{2}P(A\cap B)$$
$$= P(A) + P(B) - P(A\cap B)$$

Ya tenemos todas las propiedades de una probabilidad y además tenemos una interpretación en términos de la incertidumbre.
Ahora sólo nos falta un método para calcular probabilidades

Calculo de probabilidades

Tenemos un experimento y obtenemos su espacio muestral Ω

¿Como calcular $P(A)$ para algún $A \subset \Omega$?

1 Asignar probabilidades a todos los eventos elementales de Ω.

- Los eventos elementales son mutuamente excluyentes
- Su unión es Ω

2: Determinamos $P(A)$ para cualquier $\underline{\underline{A}}$ escribiendo a A como unión de eventos elementales

¿Cómo funciona esto?

eventos elementales

$$\Omega = \{E_1, E_2, E_3, \ldots, E_K\}$$

$$P(E_j) = p_j \quad , \quad \text{para } j = 1, \ldots, K$$

$$\sum_{j=1}^{K} p_j = 1$$

$$A = \{E_1, E_2, E_3\}$$

$$P(A) = p_1 + p_2 + p_3$$

$$B = \{ E_5, E_6, \ldots, E_k \}$$

$$P(B) = 1 - [P(E_1) + P(E_2) + P(E_3) + P(E_4)]$$